DM2

1) $\forall t \geq 0 \quad P(X \leq t) = \frac{1}{\sigma}\int_0^t x e^{-\frac{x^2}{2\sigma}} dx$

$$= \left[-e^{-\frac{x^2}{2\sigma}} \right]_0^t$$

$$= 1 - e^{-\frac{t^2}{2\sigma}}$$

Donc $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} EX = \sqrt{2\sigma}\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{2\sigma\pi}}{2} \Leftrightarrow 2\sigma\pi = 4(EX)^2 \Leftrightarrow \sigma = \frac{2(EX)^2}{\pi} \\ EX^2 = 2\sigma\,\Gamma(2) = 2\sigma \end{cases}$

donc $\begin{cases} \hat{\sigma}_1 = 2\overline{X}^2/\pi \\ \hat{\sigma}_2 = \overline{X^2}/2 \end{cases}$

Par le TCL,

$\sqrt{n}\left(\overline{X} - EX_1\right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, VX_1)$ et $VX_1 = EX^2 - (EX)^2 = 2\sigma - \frac{2\sigma\pi}{4} = \frac{4-\pi}{2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{n}\left(\overline{X} - \frac{\sqrt{2\sigma\pi}}{2}\right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0,$ sigma*(4-pi)/2 $)$ $= \sigma(2-\pi)$

Par la méthode Delta pour $g : x \mapsto 2x^2/\pi \in \mathcal{C}^1$

$$\sqrt{n}\left(\frac{2\overline{X}^2}{\pi}-\sigma\right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}\Big(0, \underbrace{\left(\frac{4}{\pi}\left(\frac{\sqrt{2\pi}\sigma}{2}\right)\right)^2 \times \frac{4-\pi}{2}\sigma}_{(*)}\Big)$$

$$(*) = \frac{16}{\pi^2} \times \frac{2\pi\sigma}{4} \times \frac{4-\pi}{2}\sigma$$

$$= \frac{4}{\pi} \times \cancel{2}(4-\pi)\sigma = \frac{4}{\pi}(4-\pi)\sigma^2$$

Donc $\sqrt{n}\Big(\underbrace{\frac{2\overline{X}^2}{\pi}}_{\hat{\sigma}_1}-\sigma\Big) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}\left(0, \frac{4}{\pi}(4-\pi)\sigma^2\right)$

- loi de $\hat{\sigma}_2$

$\mathbb{E}X^2 = 2\sigma$

$\mathbb{E}X^4 = (2\sigma)^2\,\Gamma(3) = 4\sigma^2 \times 2 = 8\sigma^2$

$\Rightarrow \mathbb{V}X^2 = 8\sigma^2 - 4\sigma^2 = 4\sigma^2$

Par le CLT,

$$\sqrt{n}\left(\overline{X^2} - 2\sigma\right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 4\sigma^2)$$

Par la methode Delta avec $g : x \longmapsto \frac{x}{2} \in \mathcal{C}^1$,

$$\sqrt{n}\Big(\underbrace{\overline{X^2}/2}_{\hat{\sigma}_2} - \sigma\Big) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}\Big(0, \underbrace{\frac{1}{4}\times 4\sigma^2}_{\sigma^2}\Big)$$

3) $L(\sigma, \underline{x}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sigma} e^{-\frac{x_i^2}{2\sigma}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x_i)$

$= e^{-\frac{1}{2\sigma}\sum x_i^2} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(\underline{x}) \prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sigma}$

donc $\ell(\sigma, \underline{x}) = -\frac{1}{2\sigma}\sum x_i^2 + \sum \log x_i - n\ln\sigma + \ln(\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(\underline{x}))$

donc $\frac{\partial \ell(\theta, \underline{x})}{\partial \theta} = \frac{\sum x_i^2}{2\sigma^2} - \frac{n}{\sigma}$

et $\frac{\partial \ell(\theta, x)}{\partial \theta} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{2\sigma} = n \Leftrightarrow \hat{\sigma}^{EMV} = \frac{\sum x_i^2}{2n}$

$= \frac{\overline{X^2}}{2} = \hat{\sigma}_3 = \hat{\sigma}_2$

4)

Information de Fischer (pour une seule variable)

$I_\theta = E\left(\left(\frac{\partial \ell(\sigma, x_1)}{\partial \sigma}\right)^2\right) = E\left(\frac{x_1^4}{4\sigma^4} + \frac{1}{\sigma^2} - \frac{x_1^2}{\sigma^3}\right)$

$= E\ \frac{8\sigma^2}{4\sigma^4} + \frac{1}{\sigma^2} - \frac{2\sigma}{\sigma^3}$

$= \frac{2+1-2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2}$

Donc l'information complète $I_{n\theta} = n I\theta = \frac{n}{\sigma^2}$

Donc loi de $\hat{\sigma}_3$:

$\sqrt{n}\left(\hat{\sigma}_3 - \sigma\right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

(Comme attendu, on retrouve la distribution asymptotique de $\hat{\sigma}_2 = \hat{\sigma}_3$.)

5) $\forall y \in \mathbb{R}$, $P(Y \leq y) = P(X^2/\sigma_0 \leq y) = P(X \leq \sqrt{\sigma_0 y})$ car $X \geq 0$ p presque sûrement

$= \begin{cases} 0 \text{ si } \sqrt{\sigma_0 y} \leq 0 \Leftrightarrow y \leq 0 \\ 1 - e^{-\frac{\sigma_0 y}{2\sigma_0}} = 1 - e^{-\frac{y}{2}} \text{ si } \sqrt{\sigma_0 y} \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 0 \end{cases}$

Donc $Y \sim \mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\right)$ ou $\Gamma\left(1, \frac{1}{2}\right)$

Donc $\sum_{i=1}^{n} Y_i \sim \Gamma(n, \frac{1}{2})$

Donc un CI à 95% non asymptotique est :

$$\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{q_{\frac{\alpha}{2}}} , \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{q_{1-\frac{\alpha}{2}}} \right]$$

Utiliser R pour calculer ces quantiles :
q_{alpha/2}=qgamma(alpha/2,shape=n,rate=0.5)

voir code en R pour implémentation
+ comment simuler une loi Rayleigh par
la méthode de la transformée inverse.